ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4/11/2011

Game → Τι είναι

Chicken

	C	D
C	0,0	-1,+1
D	1,-1	-10, -10

οδηγοί που οδηγούν μετωπικά ο ένας στον άλλο

όποιος τρομάζει στρίβει πρώτος

δύο στρατηγικές < ευθείας φορά D
< στρίβει chicken C

Αυστηρός ορισμός

Definition of finite games

→ n players

→ Each player has a set of strategies S_i

→ Strategy Profile is a vector of n strategies one for each player, that is an element of $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$

→ For each player i there is a payoff function u_i

$u_i : S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to \mathbb{R}$

$n=2$

$S_1 = \{C, D\}$
$S_2 = \{C, D\}$

πχ. u_1 συνάρτηση με πίνακα τιμών

C,C	0
C,D	-1
D,C	1
D,D	-10

u_2 : παρόμοιο

Βασικά το u_i ορίζων το παιχνίδι.

Δεν χρειάζεται n, S_i πεπερασμένα. (finite προυπόθεση ότι περάτωτο πλήθος στρατηγικών)

Notation: • strategy $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ → στρατηγική i παίκτη

• profile

• $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$

• $(\sigma_{-i}, \sigma_i') = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_i', \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$

↳ αλλάζε την ίδια θέσεις με την σ_i' στρατηγική

Τι θα γίνει αν αλλάξω τη στρατηγική σε μία νέα.

pure strategies

Mixed Strategies

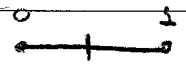
		C	D
1/10	C	0, 0	-1, 1
9/10	D	1, -1	-10, -10

Δεν δεσμεύεται ο παίκτης σε μία στρατηγική

Mixed Strategies

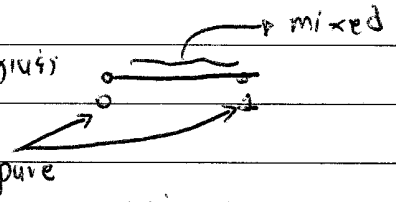
Probability Distributions on S_i

πχ. $S_1 = \{0, 1\}$



ιδέα αναβάθμα για δύο

2 στρατηγικές



$\Delta(S_i)$: set of mixed strategies of player i

3 στρατηγικές: τρίγωνο

Nash Equilibrium

A strategy profile σ is a Nash Equilibrium if

$$\forall i, \sigma_i' \quad u_i(\sigma) \geq u_i(\sigma_{-i}, \sigma_i')$$

οι άλλες μένουν ίδιες.

μία από τις πολλές για τις οποίες μπορώ να βάλω ισοδυναμία

Στο chicken

NE

	C	D
C	0, 0	-1, 1
D	1, -1	-10, -10

ΟΧΙ NE

ΝΑΙ NE

ΝΑΙ NE

ΟΧΙ NE

Παραπάνω από ένα Nash Equilibria

περίττό πλήθος NE

και mixed

Υπάρχει πεπερασμένο παίγνιο έχει περίττό αριθμό mixed NE.

Υπάρχουν παίγνια που δεν έχουν pure Nash equilibrium

πχ.

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

γιατί? Αν γράφω τι θα παίξεις έχω best response.

0, 0	0, 0
0, 0	0, 0

Άπειρα NE

Theorem [Nash]

Every finite game has at least one mixed Nash equilibrium.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

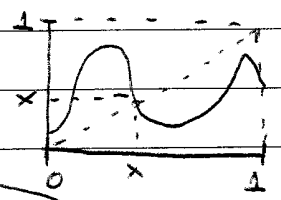
The proof is based on Brower's Fixed Point Theorem.

Theorem (Brower):

Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a compact (closed and bounded) and convex body and let $f: C \longrightarrow C$ which is continuous. The f, has a fixed point, that is, there is $x: f(x) = x$

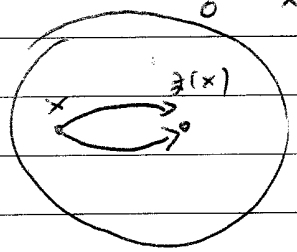
Θεώρημα Ύπαρξης.

Παράδειγμα: $n = 1$ $\quad C = [0, 1]$



Η καμπύλη τέμνει την ευθεία σε ένα σημείο, τουλάχιστον.

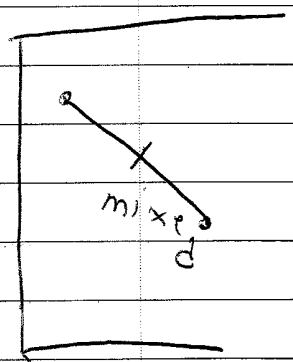
$n = 2$



Εφαρμογή σε παίγνιο

	1/4	3/4
1/3	1, -1	-1, 1
2/3	-1, 1	1, -1

Θα χρειάζουμε μια συνεχή συνάρτηση με fixed point NE.



υπόδειξη 0.2

υπόδειξη 1

$$\boxed{\text{payoff του παίκτη}} = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)(1) + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\right)(-1)$$

$$= \frac{7}{12}\cdot 1 + \frac{5}{12}(-1) = \frac{2}{12} = 1/6$$ αναμενόμενη τιμή

$$\text{payoff του παίκτη} = -1/6$$ (γιατί είναι zero sum game)

	1/4	3/4
x_1 1/3	1, -1	-1, 1
2/3	-1, 1	1, -1

x_2

$\sigma_1(x_1, 1)$ = gain of player 1 when he switches to strategy 1.

$= \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}(-1) - 1/6 = 1/4 - 3/4 - 1/6 = -2/3$

$\sigma_1(x_1, 2) = (1/4)(-1) + (3/4)\cdot 1 - 1/6 = 1/3$

Best Response $\longrightarrow$ Πάντα παίζω στρατηγική.

$\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$ $\xrightarrow{\text{Μπορούμε να φτιάξουμε συνάρτηση } f}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow \dots$

$\begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$f: \Delta\times\Delta \longrightarrow \Delta\times\Delta$

$\subseteq \mathbb{R}^4$ $\subseteq \mathbb{R}^4$

$\Delta\times\Delta$: convex compact

Από Θ. Brower έχει fixed point.

Όμως f δεν συνεχής!!!

Nash: Η f θα γίνει συνεχής, με σταδιακή μετάβαση

x_1

$\frac{1}{3} \to \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \to \frac{1}{3}$

Idea:

$$x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \sigma_i(x, j)$$

Problems

1) Negative values (δεν επιτρεπτό για πιθανότητες)

Λύση $\tilde{\sigma}_i(x, j) = \max(0, \sigma_i(x, j))$

2) The sum is not equal to 1.

Λύση Κανονικοποίηση $x_{ij} \leftarrow \dfrac{x_{ij} + \tilde{\sigma}_i(x_{ij})}{\sum_k (x_{ik} + \tilde{\sigma}_i(x_{ik}))}$

πχ. $1/3 \to \dfrac{1/3}{1/3 + 1}$

Είναι η σ συνεχής?

ΝΑΙ (?) Αφού. Αφού έχει Brower Fixed Point

Αφού έχει στρατηγική για την οποία δεν έχει να κερδίσει κάτι περισσότερο.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΕΕΣ

→ BROWER

→ συνέχεια

$1/3 \to 1/4$

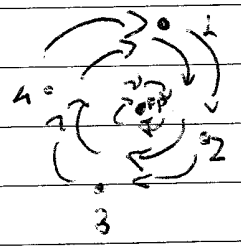
$2/3 \quad 3/4$

Μείον βάλαμε γιατί αφέχει από με Όσο παίρνουμε παίρνουμε πιο πολύ.

πρόβλημα — NE → ① πώς υπολογίζονται? → ② αν υπάρχουν περισσότερα πώς διαλέγουμε?

① Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την υπόδειξη για να τα βρούμε;

ΟΧΙ



Δεν μπορεί ότι θα τα βρούμε.

Υπάρχει τρόπος να τα βρούμε αλλά απαιτεί πολύ χρόνο.

chicken

	q	1-q
p	0,0	-1,1
1-p	1,-1	-10, -10

Mixed Nash Eq? — εύρεση p, q

Gain of player 1 when he selects the 1st strategy:

Μία μόλις απάντηση είναι pure strategy.

$$q \cdot 0 + (1-q)(-1) = -1 + q$$

Gain of player 1 when he selects the 2nd strategy =

$$q \cdot 1 + (1-q)(-10) = -10 + 11q$$

Αν θέλω το q μπορώ να διαλέξω.

Μη μηδενική πιθανότητα ⟺ μέγιστο payoff

$$10q = q \iff q = 9/10$$

Mixed Nash Equilibrium $\left.\begin{array}{l} p = 9/10 \\ q = 9/10 \end{array}\right\}$ Το τρίτο equilibrium του chicken.

Παρατήρηση: Συμμετρικό παιχνίδι → Συμμετρικό NE